2. ЛЕКЦИЯ <u>КЕЗДЕЙСОҚ СИГНАЛДАР</u>

Кездейсоқ сигнал, кездейсоқ процесс. Байқалу ансамблі. Ықтималдылықтың таралуы, Ықтималдық тығыздығы. Ықтималдық тығыздығын түрлендіру.

1. Уақыт бойынша өзгеретін кездейсоқ сигналдың математикалық моделі <u>*кездейсоқ процесс*</u> деп аталады. Егер $\xi(t)$ - кездейсоқ сандардың тізбегі (кездейсоқ күш) болса, функцияның ерекше түрін - онда кездейсоқ процесті $x_\xi(t)$ түрінде белгілейміз. Табиғи жағдайда кездейсоқ күштердің $\xi_i(t)$ ($i = 1,2,...N$) тізбегі кездеседі, оған $x_{\xi,i}(t)$ ансамблі сәйкес келеді. Ансамбілдің сигналдың қабылдануынан кейін толық белгілі болған осы функциялардың бірі кездейсоқ процестің <u>*байқалуы*</u> деп аталады. Бұл байқалуды уақыттың детерминделген (кездейсоқ емес) функциясы ретінде қарастыруға болады. Байқалулардың $N \to \infty$ кездегі статистикалық ансамблі кездейсоқ (стохасты) процесс деп аталады .

2. <u>*Ықтималдылықтың және ықтималдылық тығыздығының таралуы.*</u>

Ықтималдық P_i деп: физикалық шамалардың өлшенген мәндерінің N_i санының, ансамблдегі барлық элементтердің санына N қатынасының шегін (ансамблдегі элементтің саны шексіздікке өскен кездегі) айтамыз:

$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} . \qquad (1)$$

Бұл формуланы эвиваленттi түрде жазуға болады:

$$P_i = \lim_{T\to\infty} \frac{t_i}{T} , \qquad (2)$$

мұндағы t_i - жүйе i күйінде ($x_{\xi,i}$ мәні) болған кездегі уақыт, T - бақылаудың толық уақыты . Бұл формулалар (1),(2) системаның сыртқы шарттары өзгеріссіз күйде болған кезде орындалады.

Үздіксіз кездейсоқ сигналдар үшін ықтималдылықтың (1), (2) анықтамасын дәлірек алу қажет. Себебі, үздіксіз шамалар шексіз (есепсіз мәндер) мәндердің жиынын қабылдайды, сондықтан t_i уақыты нөлге тең болғандықтан P_i де нөлге тең болады.Осы себепті кездейсоқ шаманың болатын мәндерінің белгілі интервалын қарастыру керек, мысалы $0 < x_\xi < x$. Сонда біз дискретті жағдаймен ұқсастыққа келеміз және үздіксіз кездейсоқ шама $x(t)$ үшін ықтималдылықтың таралу функциясының анықтамасын (ықтималдылықтың таралу заңдылығының аналитикалық өрнегін) сипаттай аламыз:

$$P(x_\xi(t) < x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \theta(x - x_{\xi,i}(t)) =< \theta(x - x_\xi(t)) > . \qquad (3)$$

Жақша $< \ldots. >$ ансамбль бойынша орташа мәнді білдіреді, $\theta(t)$ - $t = x - x_{\xi,i}(t)$ аргументі бойынша Хэвисайд (бірлік сигнал функциясы) функциясы .
Анықтама бойынша

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} . \qquad (4)$$

$\theta(t)$ функциясын амплитудасы A тік бұрышты және ұзақтылығы T импульс түріндегі математикалық өрнек ретінде қолдану ыңғайлы:

$$x(t) = A(\theta(t) - \theta(t - T)) \qquad (5)$$

Ықтималдылықтың тығыздығын ($\rho(x,t)$) (3)-ші өрнектің туындысы ретінде анықтаймыз:

$$\rho(x,t) = \frac{d}{dx} P(x_\xi(t) < x) = \frac{d}{dx} < \theta(x - x_\xi(t)) >=< \delta(x - x_\xi(t)) >, \qquad (6)$$

мұндағы $\delta(t)$ - *дельта-функция* , немесе төмендегі байланыстармен анықталатын Дирак функциясы

1. $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$

(7)

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Анықтаманың екінші бөлімінен $\delta(t)$ өлшемділігі t аргументінің өлшемділігіне кері екендігі шығады.

δ -функция маңызды қасиетке ие, ол - фильтрлеу қасиеті:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = f(t_0), \qquad (8)$$

яғни δ - функциясы бар кез-келген анықталған интеграл оңай есептеледі.

Дирак функциясы ($\delta(t)$) <u>*жалпыланған, бейнелік түрдегі*</u> деп аталатын функциялар тобына жатады. (7)-ші өрнектің қасиеттеріне көптеген функциялар ие. Мысалы, $\lim_{\lambda\to\infty}\{\lambda|\pi(\lambda^2 t^2+1)\}$, $\lim_{\lambda\to\infty}\{(\sin\lambda t)\pi t\}$ өрнектері де (7)-ші қасиеттерге ие. Сондықтан, классикалық мағынада анықтауға болмайтын, бірақ (7)-ші қасиеттері бар Хэвисайд функциясының туындысын δ - функция арқылы анықтауға болады:

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\delta(t)\,. \tag{9}$$

3. <u>*Ықтималдылық тығыздығының қасиеттері*</u>

Нормалау шарты былай беріледі:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)dx=1\,. \tag{10}$$

Егер $y(t)=f(x(t))$ болса, онда төмендегі қатынас орындалады:

$$y(t)=\int f(x^{'})\delta(x(t)-x^{'})dx^{'}\,. \tag{11}$$

(11) - ші өрнекті ансамбль бойынша орташаласақ:

$$<y(t)>=<f(x(t))>=\int f(x^{'})\rho(x^{'},t)dx^{'} \tag{12}$$

(12) – ші формула ықтималдылық тығыздығы арқылы кез–келген функцияның орташа мәндерін анықтайды.
Егер $y=f(x(t))$ болса ықтималдық тығыздығының $\rho(x,t)$ өрнегін $\rho(y,t)$ өрнегіне түрлендіреміз:

$$\rho(y,t)=<\delta(y-y_{\xi}(t))>=<\delta(y-f(x_{\xi}(t))>=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y-f(x))\rho(x,t)dx\,, \tag{13}$$

мұнда интегралдау айнымалысы ретінде $x_{\xi}=x$ деп алдық. $x=f(y)$ жағдайы үшін (егер x-ті y арқылы бірмәнді анықтауға болса) (13) –ші инегралды $dx=\frac{dx}{dy}dy$ түрлендіруін пайдаланып y арқылы алсақ:

$$\rho(y,t)=\rho(x(y),t)\cdot\left|\frac{df(x)}{dx}\right|^{-1}_{x=x(y)}, \tag{14}$$

мұнда оң жақ бөлігінде $x = x(y) = f^{-1}(y)$ деп түсінеміз. Ықтималдық тығыздығы әрқашан оң шама болғандықтан $\frac{df(x)}{dx}$ туындысы модуль бойынша алынған. Стационар жағдай үшін (14) формуланы ықтималдықтың сақталу шартынан ($P(x) = P(y)$) оңай алуға болады:

$$\int \rho(x)dx = \int \rho(y)dy \; , \quad \rho(y) = \rho(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \; . \qquad (15)$$

Мысал ретінде төмендегі функцияны қарастырамыз:

$$y = \sin x \; , \qquad x = \arcsin y \qquad (16)$$

(15) –ші формула бойынша $\rho(x)$ белгілі деп, $\rho(y)$ өрнегін табамыз:

$$\rho(y) = \rho(x)\left|\frac{d(\arcsin y)}{dy}\right| = \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-y^2}} \; . \qquad (17)$$

Өздік жұмыс тақырыптары

1. Кездейсоқ процестердің ықтималдық сипаттамалары. Математикалық болжам және дисперсия
2. Қалыпты кездейсоқ процесс.
3. Корреляция интервалы. Спектрдің тиімді ені. Сигналдың базасы

[2, 6] - Әдебиеттер